Um Minicurso sobre Teoria dos Jogos

Pedro Aladar Tonelli

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística USP

Semana de Matemática Aplicada FFCLRP-USP setembro de 2006

Sumário

1. Jogos de Soma Zero
   - Introdução
   - O Conceito de equilíbrio de Nash
   - Os jogos de soma zero e dois jogadores
   - Elementos de Sela e Valor do Jogo
   - Estratégias Mistas e Estratégias Ótimas
   - Estratégias dominantes
2. Jogos não soma zero
   - Definições
   - Exemplos com matrizes de dimensão 2
   - Equilíbrios evolucionariamente estáveis
   - Bibliografia

O que é?

Teoria dos Jogos é conjunto de ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas que envolvem conflito de interesses por parte dos agentes que tomam decisão.
Exemplos:

- Jogo de xadrez
- Conflito diplomático ou político
- Concorrência na Economia
- Teoria da Evolução em Sistemas biológicos

O que é?

Teoria dos Jogos é conjunto de ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas que envolvem conflito de interesses por parte dos agentes que tomam decisão.
Exemplos:

- Jogo de xadrez
- Conflito diplomático ou político
- Concorrência na Economia
- Teoria da Evolução em Sistemas biológicos

O que é?

Teoria dos Jogos é conjunto de ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas que envolvem conflito de interesses por parte dos agentes que tomam decisão.
Exemplos:

- Jogo de xadrez
- Conflito diplomático ou político
- Concorrência na Economia
- Teoria da Evolução em Sistemas biológicos

O que é?

Teoria dos Jogos é conjunto de ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas que envolvem conflito de interesses por parte dos agentes que tomam decisão.
Exemplos:

- Jogo de xadrez
- Conflito diplomático ou político
- Concorrência na Economia
- Teoria da Evolução em Sistemas biológicos

O que é?

Teoria dos Jogos é conjunto de ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas que envolvem conflito de interesses por parte dos agentes que tomam decisão.
Exemplos:

- Jogo de xadrez
- Conflito diplomático ou político
- Concorrência na Economia
- Teoria da Evolução em Sistemas biológicos

Histórico

- Cournot (1840) Walras (1890)
- Borel (1915)
- von Neumann e Morgenstern (1940)
- Nash, Shapley, Aumann (1950 + 1960)
- Maynard-Smith (1970)

Histórico

- Cournot (1840) Walras (1890)
- Borel (1915)
- von Neumann e Morgenstern (1940)
- Nash, Shapley, Aumann (1950 + 1960)
- Maynard-Smith (1970)

Histórico

- Cournot (1840) Walras (1890)
- Borel (1915)
- von Neumann e Morgenstern (1940)
- Nash, Shapley, Aumann (1950 + 1960)
- Maynard-Smith (1970)

Histórico

- Cournot (1840) Walras (1890)
- Borel (1915)
- von Neumann e Morgenstern (1940)
- Nash, Shapley, Aumann (1950 + 1960)
- Maynard-Smith (1970)

Histórico

- Cournot (1840) Walras (1890)
- Borel (1915)
- von Neumann e Morgenstern (1940)
- Nash, Shapley, Aumann (1950 + 1960)
- Maynard-Smith (1970)

Divisões Comuns

Tradicionalmente a teoria é dividida em tópicos

- Jogos Cooperativos
- Jogos não Cooperativos
- Forma Extensiva
- Forma Estratégica (Normal)
- Jogos de Soma Zero
- Jogos sem Soma Zero
- Jogos com 2 jogadores ou jogos com n jogadores.

Estudaremos os jogos não cooperativos com dois jogadores.

Divisões Comuns

Tradicionalmente a teoria é dividida em tópicos

- Jogos Cooperativos
- Jogos não Cooperativos
- Forma Extensiva
- Forma Estratégica (Normal)
- Jogos de Soma Zero
- Jogos sem Soma Zero
- Jogos com 2 jogadores ou jogos com n jogadores.

Estudaremos os jogos não cooperativos com dois jogadores.

Divisões Comuns

Tradicionalmente a teoria é dividida em tópicos

- Jogos Cooperativos
- Jogos não Cooperativos
- Forma Extensiva
- Forma Estratégica (Normal)
- Jogos de Soma Zero
- Jogos sem Soma Zero
- Jogos com 2 jogadores ou jogos com n jogadores.

Estudaremos os jogos não cooperativos com dois jogadores.

Divisões Comuns

Tradicionalmente a teoria é dividida em tópicos

- Jogos Cooperativos
- Jogos não Cooperativos
- Forma Extensiva
- Forma Estratégica (Normal)
- Jogos de Soma Zero
- Jogos sem Soma Zero
- Jogos com 2 jogadores ou jogos com n jogadores.

Estudaremos os jogos não cooperativos com dois jogadores.

Primeiras definições

Um jogo não cooperativo na forma normal é composto dos seguintes elementos:

- Jogadores: $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ (finito).
- Estratégias: Σ_i (quase sempre finito).
- $\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$ (pagamento)

$\Pi_i(u_1, \ldots, u_n)$ é o pagamento que recebe o i-ésimo jogador uma vez que todos os jogadores se decidiram por suas estratégias.

Primeiras definições

Um jogo não cooperativo na forma normal é composto dos seguintes elementos:

- Jogadores: $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ (finito).
- Estratégias: Σ_i (quase sempre finito).
- $\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$ (pagamento)

$\Pi_i(u_1, \ldots, u_n)$ é o pagamento que recebe o i-ésimo jogador uma vez que todos os jogadores se decidiram por suas estratégias.

Primeiras definições

Um jogo não cooperativo na forma normal é composto dos seguintes elementos:

- Jogadores: $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ (finito).
- Estratégias: Σ_i (quase sempre finito).
- $\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$ (pagamento)

$\Pi_i(u_1, \ldots, u_n)$ é o pagamento que recebe o i-ésimo jogador uma vez que todos os jogadores se decidiram por suas estratégias.

Primeiras definições

Um jogo não cooperativo na forma normal é composto dos seguintes elementos:

- Jogadores: $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ (finito).
- Estratégias: Σ_i (quase sempre finito).
- $\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$ (pagamento)

$\Pi_i(u_1, \ldots, u_n)$ é o pagamento que recebe o i-ésimo jogador uma vez que todos os jogadores se decidiram por suas estratégias.

Dilema dos Prisioneiros

O Jogo: Dois prisioneiros são mantidos em escritórios separados e o promotor do caso oferece a cada um o seguinte: caso ele testemunhe contra o comparsa e este não testemunhar contra ele, sua pena será de 1 ano de prisão cabendo a seu colega cumprir 10 anos. Caso o comparsa também testemunhe contra ele sua pena será de 5 anos. Se, todavia, ambos se recusarem a testemunhar um contra o outro, ambos passarão dois anos na cadeia.

Tabela de pagamentos do dilema dos prisioneiros

	N	T
N	$(-2, -2)$	$(-10, -1)$
T	$(-1, -10)$	$(-5, -5)$

Melhor Resposta

Temos um jogo na forma normal:

$$\Pi : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}^n$$

Um ponto $u = (u_1, \ldots, u_n)) \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ vamos chamar de um perfil de estratégias.
Fixado o perfil u e o jogador i definimos o conjunto melhor resposta de i $M_i(u) \in \Sigma_i$ como

$$M_i(u) = \{v_i \in \Sigma_i : \Pi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) = \max_{v \in \Sigma_i} \Pi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n)\} \quad (1)$$

O equilíbrio como ponto fixo

Note que na definição acima não é necessário que $u_i \in M_i(u)$. Definimos

$$M(u) = M_1(u) \times \cdots M_n(u) \subset \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \tag{2}$$

e diremos que um perfil u é um Equilíbrio de Nash quando:

$$u \in M(u)$$

Interpretação do equilíbrio

Se $u \in M(u)$, para o jogador p_i:
$u_i \in M_i(u) \subset \Sigma_i$, ou seja, u_i é a melhor resposta do jogador para o perfil u.
Assim para um perfil de equilíbrio, se um jogador mudar sozinho de estratégia ele não pode aumentar, e corre o risco de rebaixar o ganho individual Π_i.
Obs: Pode existir um perfil em que todos os jogadores ganham mais que num perfil de equilíbrio, mas aí cada jogador precisaria do auxílio dos outros.

Equilíbrio do dilema dos prisioneiros

	N	T
N	$(-2, -2)$	$(-10, -1)$
T	$(-1, -10)$	$(-5, -5)$

O perfil $u = (T, T)$ é um equilíbrio de Nash.

Método dos perfís racionais

Diremos que um perfil $u \in \Sigma$ satisfaz a propriedade da racionalidade individual para o jogador i quando

$$\Pi_i(u) = \max_{v \in \Sigma_i} \Pi_i(u_1, \ldots, v, \ldots, u_n) \tag{3}$$

Definimos o conjunto de perfis racionais de i como sendo:

$$R_i = \{u \in \Sigma : u \text{ tem a prop. de racionalidade individual } \} \subset \Sigma \tag{4}$$

$N = \cap_{i=1}^{n} R_i$ é o conjunto de todos os perfís de equilíbrio do jogo.

definição dos jogos de soma zero

Num jogo com dois Jogadores (Luiza e Carlos) com as estratégias

$$\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ e } \Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$$

O jogo tem soma zero se $\Pi_1(e_i, f_j) + \Pi_2(e_i, f_j) = 0$.

$$\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), -\Pi_1(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij}) \tag{5}$$

Exemplo: Pedra, papel, tesoura

Luiza e Carlos estão jogando Pedra, Papel e Tesoura, eles tem o mesmo conjunto de estratégias $\Sigma = \{R, P, T\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Elementos de sela

Se (e_i, f_j) for um par de equilíbrio então:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \forall k \in \{1, \ldots, n\} \tag{7}$$

$$-a_{ij} \geq -a_{il} \forall l \in \{1, \ldots, m\} \tag{8}$$

Dada uma matriz $A \in M_{n \times m}$ um elemento a_{ij} é chamado elemento de sela da matriz A quando satisfaz as duas relações simultaneamente:

$$a_{ij} = \max_k a_{kj} \text{ para } k \in \{1, \ldots, n\} \tag{9}$$

$$a_{ij} = \min_l a_{il} \text{ para } l \in \{1, \ldots, m\} \tag{10}$$

exemplo

Vejamos um exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Propriedades dos elementos de sela

Proposição

Se a_{ij} e a_{pq} forem diferentes elementos de sela de uma matriz A, então a_{pj} e a_{iq} também são elementos de sela e $a_{ij} = a_{pq}$

- No caso de haver muitos elementos de sela seus valores são iguais.
- Pode não haver elementos de sela.

Propriedades dos elementos de sela

Proposição

Se a_{ij} e a_{pq} forem diferentes elementos de sela de uma matriz A, então a_{pj} e a_{iq} também são elementos de sela e $a_{ij} = a_{pq}$

- No caso de haver muitos elementos de sela seus valores são iguais.
- Pode não haver elementos de sela.

Propriedades dos elementos de sela

Proposição

Se a_{ij} e a_{pq} forem diferentes elementos de sela de uma matriz A, então a_{pj} e a_{iq} também são elementos de sela e $a_{ij} = a_{pq}$

- No caso de haver muitos elementos de sela seus valores são iguais.
- Pode não haver elementos de sela.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Estratégias Mistas

- É comum uma matriz de um jogo não ter pontos de sela.
- Definimos então uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras.
- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$: estratégias de Luiza.
- $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$: estratégias de Carlos.
- $M_1 = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0\}$ estratégias mistas de Luiza.
- $M_2 = \{(q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m : \sum q_j = 1 \text{ e } q_j \geq 0\}$ estratégias mistas de Carlos.

Exemplo: estratégia mista

Digamos que a matriz do jogo seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz não tem ponto de Sela.
- Luiza tem duas estratégias puras e Carlos três.
- $(0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $(0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- Qual seria o pagamento dos jogadores neste jogo?

Exemplo: estratégia mista

Digamos que a matriz do jogo seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz não tem ponto de Sela.
- Luiza tem duas estratégias puras e Carlos três.
- $(0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $(0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- Qual seria o pagamento dos jogadores neste jogo?

Exemplo: estratégia mista

Digamos que a matriz do jogo seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz não tem ponto de Sela.
- Luiza tem duas estratégias puras e Carlos três.
- $(0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $(0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- Qual seria o pagamento dos jogadores neste jogo?

Exemplo: estratégia mista

Digamos que a matriz do jogo seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz não tem ponto de Sela.
- Luiza tem duas estratégias puras e Carlos três.
- $(0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $(0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- Qual seria o pagamento dos jogadores neste jogo?

Exemplo: estratégia mista

Digamos que a matriz do jogo seja:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Esta matriz não tem ponto de Sela.
- Luiza tem duas estratégias puras e Carlos três.
- $(0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $(0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- Qual seria o pagamento dos jogadores neste jogo?

Extensão Mista do Jogo

- Luiza escolhe: $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$
- Carlos: $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$
- Pagamento: $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- (M_1, M_2, E) Extensão mista do jogo.

Extensão Mista do Jogo

- Luiza escolhe: $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$
- Carlos: $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$
- Pagamento: $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- (M_1, M_2, E) Extensão mista do jogo.

Extensão Mista do Jogo

- Luiza escolhe: $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$
- Carlos: $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$
- Pagamento: $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- (M_1, M_2, E) Extensão mista do jogo.

Extensão Mista do Jogo

- Luiza escolhe: $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$
- Carlos: $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$
- Pagamento: $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- (M_1, M_2, E) Extensão mista do jogo.

No exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $p = (0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $q = (0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- $E(p, q) = 0.60.50.8 + 0.60.30.2 + 0.60.20.5 + 0.40.50.1 + 0.40.30.5 + 0.40.20.2$
- $E(p, q) = 0.43200$

No exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $p = (0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $q = (0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- $E(p, q) = 0.60.50.8 + 0.60.30.2 + 0.60.20.5 + 0.40.50.1 + 0.40.30.5 + 0.40.20.2$
- $E(p, q) = 0.43200$

No exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $p = (0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $q = (0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- $E(p, q) = 0.60.50.8 + 0.60.30.2 + 0.60.20.5 + 0.40.50.1 + 0.40.30.5 + 0.40.20.2$
- $E(p, q) = 0.43200$

No exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $p = (0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $q = (0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- $E(p, q) = 0.60.50.8 + 0.60.30.2 + 0.60.20.5 + 0.40.50.1 + 0.40.30.5 + 0.40.20.2$
- $E(p, q) = 0.43200$

No exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- $p = (0.6, 0.4)$ é uma estratégia mista de Luiza.
- $q = (0.5, 0.3, 0.2)$ uma estratégia mista de Carlos.
- $E(p, q) = 0.60.50.8 + 0.60.30.2 + 0.60.20.5 + 0.40.50.1 + 0.40.30.5 + 0.40.20.2$
- $E(p, q) = 0.43200$

Valor de Linha e Valor de Coluna de uma matriz

- Valor de Linha, Valor do Jogo para Luiza
- $v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
- Valor de Coluna. Valor do jogo para Carlos.
- $v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Valor de Linha e Valor de Coluna de uma matriz

- Valor de Linha, Valor do Jogo para Luiza
- $v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
- Valor de Coluna. Valor do jogo para Carlos.
- $v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Valor de Linha e Valor de Coluna de uma matriz

- Valor de Linha, Valor do Jogo para Luiza
- $v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
- Valor de Coluna. Valor do jogo para Carlos.
- $v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Valor de Linha e Valor de Coluna de uma matriz

- Valor de Linha, Valor do Jogo para Luiza
- $v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
- Valor de Coluna. Valor do jogo para Carlos.
- $v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Valor de Linha e Valor de Coluna de uma matriz

- Valor de Linha, Valor do Jogo para Luiza
- $v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
- Valor de Coluna. Valor do jogo para Carlos.
- $v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Valor de Linha e Valor de Coluna de uma matriz

- Valor de Linha, Valor do Jogo para Luiza
- $v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$
- Valor de Coluna. Valor do jogo para Carlos.
- $v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

Estratégias Ótimas

- Estratégias ótimas, ou estratégias maxmin e minmax.
- $\mathbf{r}$ é uma estratégia ótima para Luiza
- $v_L(A) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$
- $\mathbf{s}$ é uma estratégia ótima para Carlos se
- $v_C(A) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$

Estratégias Ótimas

- Estratégias ótimas, ou estratégias maxmin e minmax.
- **r** é uma estratégia ótima para Luiza
- $v_L(A) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$
- **s** é uma estratégia ótima para Carlos se
- $v_C(A) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$

Estratégias Ótimas

- Estratégias ótimas, ou estratégias maxmin e minmax.
- $\mathbf{r}$ é uma estratégia ótima para Luiza
- $v_L(A) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$
- $\mathbf{s}$ é uma estratégia ótima para Carlos se
- $v_C(A) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$

Estratégias Ótimas

- Estratégias ótimas, ou estratégias maxmin e minmax.
- $\mathbf{r}$ é uma estratégia ótima para Luiza
- $v_L(A) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$
- $\mathbf{s}$ é uma estratégia ótima para Carlos se
- $v_C(A) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$

Estratégias Ótimas

- Estratégias ótimas, ou estratégias maxmin e minmax.
- $\mathbf{r}$ é uma estratégia ótima para Luiza
- $v_L(A) = \min_{\mathbf{q}} E(\mathbf{r}, \mathbf{q})$
- $\mathbf{s}$ é uma estratégia ótima para Carlos se
- $v_C(A) = \max_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$

Teorema Minmax

Teorema

Dada uma matriz A temos que existem estratégias mistas ótimas para o jogador das linhas e das colunas e $v_C(A) = v_L(A)$.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Estratégias ótimas e perfil de equilíbrio

- $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estratégias ótimas.
- $v_L(A) = E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A)$
- Se Luiza troca a estratégia e Carlos mantém:
- $E(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v_C(A) \geq E(\mathbf{p}, \mathbf{s})$
- Luiza não ganha nada desviando da estratégia.
- Nem Carlos com raciocínio análogo.
- O perfil $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ é um equilíbrio de Nash.

Um resultado para o Cálculo das estratégias ótimas

Proposição

Definindo: $E(i, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$ *e* $E(\mathbf{p}, j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$ *então:*

$$v_C(A) = \min_{\mathbf{q}} \max_{i} E(i, \mathbf{q}) \tag{12}$$

$$v_L(A) = \max_{\mathbf{p}} \min_{j} E(\mathbf{p}, j) \tag{13}$$

Caso de matrizes 2×2

- Quando cada jogador tem só duas estratégias puras temos:
- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$
- $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]$
- Neste caso podemos calcular facilmente os equilíbrios.

Caso de matrizes 2×2

- Quando cada jogador tem só duas estratégias puras temos:
- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$
- $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]$
- Neste caso podemos calcular facilmente os equilíbrios.

Caso de matrizes 2×2

- Quando cada jogador tem só duas estratégias puras temos:
- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$
- $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]$
- Neste caso podemos calcular facilmente os equilíbrios.

Caso de matrizes 2×2

- Quando cada jogador tem só duas estratégias puras temos:
- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$
- $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]$
- Neste caso podemos calcular facilmente os equilíbrios.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Para Luiza temos
- $\min_j E(\mathbf{p}, j) = \min\{E(x,1), E(x,2)\}$
- $E(x,1) = 1.x + 3.(1-x) = -2x + 3$ e $E(x,2) = 2x$
- O Valor de Linha será o valor da intersecção das retas$E(x,i)$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Para Luiza temos
- $\min_j E(\mathbf{p}, j) = \min\{E(x,1), E(x,2)\}$
- $E(x,1) = 1.x + 3.(1-x) = -2x + 3$ e $E(x,2) = 2x$
- O Valor de Linha será o valor da intersecção das retas$E(x,i)$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Para Luiza temos
- $\min_j E(\mathbf{p}, j) = \min\{E(x,1), E(x,2)\}$
- $E(x,1) = 1.x + 3.(1-x) = -2x + 3$ e $E(x,2) = 2x$
- O Valor de Linha será o valor da intersecção das retas$E(x,i)$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

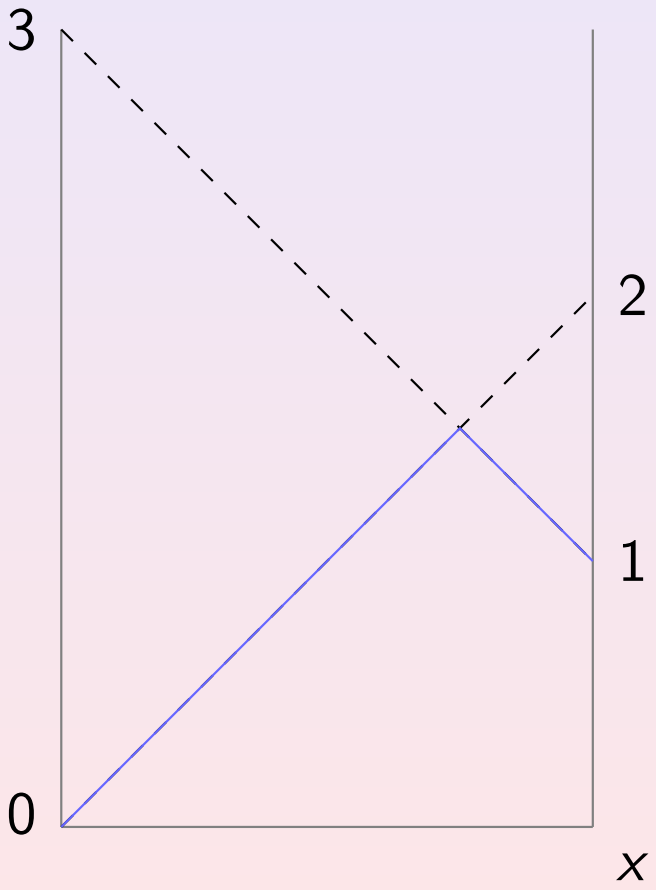
- Para Luiza temos
- $\min_j E(\mathbf{p}, j) = \min\{E(x,1), E(x,2)\}$
- $E(x,1) = 1.x + 3.(1-x) = -2x + 3$ e $E(x,2) = 2x$
- O Valor de Linha será o valor da intersecção das retas$E(x,i)$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Para Luiza temos
- $\min_j E(\mathbf{p}, j) = \min\{E(x,1), E(x,2)\}$
- $E(x,1) = 1.x + 3.(1-x) = -2x + 3$ e $E(x,2) = 2x$
- O Valor de Linha será o valor da intersecção das retas$E(x,i)$

Gráfico para o problema maxmin de Luiza



Valor do jogo para Luiza

- Neste caso temos:
- $v_L(A) = 3/2$
- estratégia ótima de Luiza é $(3/4, 1/4)$.

Valor do jogo para Luiza

- Neste caso temos:
- $v_L(A) = 3/2$
- estratégia ótima de Luiza é $(3/4, 1/4)$.

Valor do jogo para Luiza

- Neste caso temos:
- $v_L(A) = 3/2$
- estratégia ótima de Luiza é $(3/4, 1/4)$.

Para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- Para Carlos temos que achar
- $\max\{E(1,y), E(2,y)\}$
- $E(1,y) = 1.y + 2.(1-y) = -y + 2$ e $E(2,y) = 3y$
- O Valor de Coluna será o valor da intersecção das retas$E(i,y)$

Para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- Para Carlos temos que achar
- $\max\{E(1,y), E(2,y)\}$
- $E(1,y) = 1.y + 2.(1-y) = -y + 2$ e $E(2,y) = 3y$
- O Valor de Coluna será o valor da intersecção das retas$E(i,y)$

Para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- Para Carlos temos que achar
- $\max\{E(1,y), E(2,y)\}$
- $E(1,y) = 1.y + 2.(1-y) = -y + 2$ e $E(2,y) = 3y$
- O Valor de Coluna será o valor da intersecção das retas$E(i,y)$

Para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

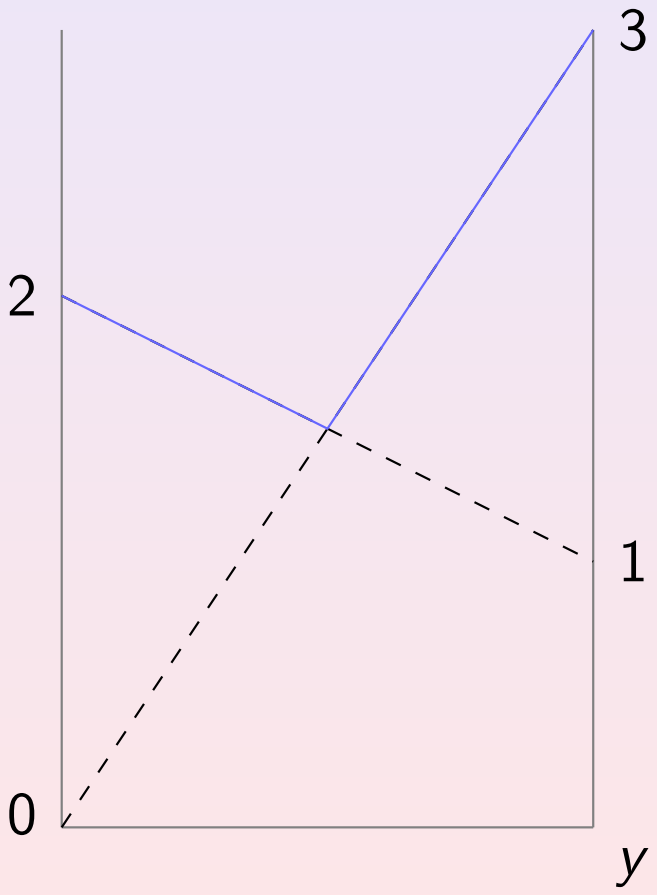
- Para Carlos temos que achar
- $\max\{E(1,y), E(2,y)\}$
- $E(1,y) = 1.y + 2.(1-y) = -y + 2$ e $E(2,y) = 3y$
- O Valor de Coluna será o valor da intersecção das retas$E(i,y)$

Para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- Para Carlos temos que achar
- $\max\{E(1,y), E(2,y)\}$
- $E(1,y) = 1.y + 2.(1-y) = -y + 2$ e $E(2,y) = 3y$
- O Valor de Coluna será o valor da intersecção das retas$E(i,y)$

Problema minmax para Carlos



Valor do jogo para Carlos

- Neste caso temos:
- $v_C(A) = 3/2$
- estratégia ótima de Carlos é $(1/2, 1/2)$.

Valor do jogo para Carlos

- Neste caso temos:
- $v_C(A) = 3/2$
- estratégia ótima de Carlos é $(1/2, 1/2)$.

Valor do jogo para Carlos

- Neste caso temos:
- $v_C(A) = 3/2$
- estratégia ótima de Carlos é $(1/2, 1/2)$.

Dominância para Luiza

- Luiza possui estratégias puras $e_i, e_k \in \Sigma_1$ tais que
- $\Pi_1(e_i, f_j) \geq \Pi_1(e_k, f_j)$
- para **toda** estratégia f_j de Carlos.
- Dizemos que e_i domina e_k.

Dominância para Luiza

- Luiza possui estratégias puras $e_i, e_k \in \Sigma_1$ tais que
- $\Pi_1(e_i, f_j) \geq \Pi_1(e_k, f_j)$
- para **toda** estratégia f_j de Carlos.
- Dizemos que e_i domina e_k.

Dominância para Luiza

- Luiza possui estratégias puras $e_i, e_k \in \Sigma_1$ tais que
- $\Pi_1(e_i, f_j) \geq \Pi_1(e_k, f_j)$
- para **toda** estratégia f_j de Carlos.
- Dizemos que e_i domina e_k.

Dominância para Carlos

- Carlos possui estratégias puras $f_j, f_l \in \Sigma_2$ tais que
- $\Pi_1(e_i, f_j) \leq \Pi_1(e_i, f_l)$
- para **toda** estratégia e_i de Luiza.
- Dizemos que f_j domina f_l.

Dominância para Carlos

- Carlos possui estratégias puras $f_j, f_l \in \Sigma_2$ tais que
- $\Pi_1(e_i, f_j) \leq \Pi_1(e_i, f_l)$
- para **toda** estratégia e_i de Luiza.
- Dizemos que f_j domina f_l.

Dominância para Carlos

- Carlos possui estratégias puras $f_j, f_l \in \Sigma_2$ tais que
- $\Pi_1(e_i, f_j) \leq \Pi_1(e_i, f_l)$
- para **toda** estratégia e_i de Luiza.
- Dizemos que f_j domina f_l.

Exemplo: Dominância para Luiza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Dominância para Luiza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Dominância para Luiza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dominância para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dominância para Carlos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo de redução

O jogo entre Luiza e Carlos tem a seguinte matriz de pagamento

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Note que a linha 2 domina a linha 3

Exemplo de redução

O jogo entre Luiza e Carlos tem a seguinte matriz de pagamento

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Note que a linha 2 domina a linha 3

A matriz reduzida

- Luiza não jogará nada na linha 3
- A matriz reduzida do jogo será

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A matriz reduzida

- Luiza não jogará nada na linha 3
- A matriz reduzida do jogo será

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A matriz reduzida

- Luiza não jogará nada na linha 3
- A matriz reduzida do jogo será

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Cálculo da estratégia ótima de Luiza

- Luiza acha a estratégia maxmin entre
- $E(x, 1) = 2 - 3x$
- $E(x, 2) = 1$
- $E(x, 3) = 4x - 2$

Cálculo da estratégia ótima de Luiza

- Luiza acha a estratégia maxmin entre
- $E(x, 1) = 2 - 3x$
- $E(x, 2) = 1$
- $E(x, 3) = 4x - 2$

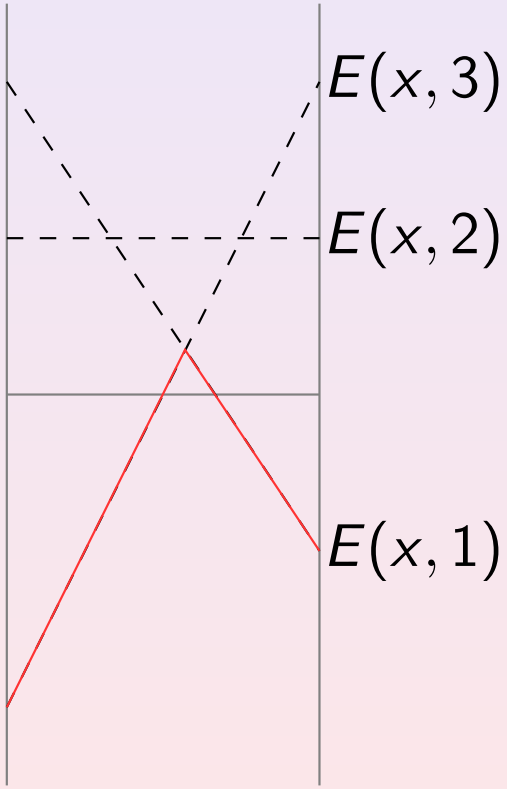
Cálculo da estratégia ótima de Luiza

- Luiza acha a estratégia maxmin entre
- $E(x, 1) = 2 - 3x$
- $E(x, 2) = 1$
- $E(x, 3) = 4x - 2$

Cálculo da estratégia ótima de Luiza

- Luiza acha a estratégia maxmin entre
- $E(x, 1) = 2 - 3x$
- $E(x, 2) = 1$
- $E(x, 3) = 4x - 2$

Gráfico



- Valor do Jogo para Luiza é $2/7 = 0.285$
- Estratégia ótima de Luiza é $(4/7, 3/7, 0)$

- Valor do Jogo para Luiza é $2/7 = 0.285$
- Estratégia ótima de Luiza é $(4/7, 3/7, 0)$

Estratégia para Carlos

- Estratégia ótima para Carlos terá a forma $(y, 0, 1-y)$
- Pois qualquer peso na coluna 2 ativa $E(x, 2)$ e aumenta o ganho de Luiza.
- Fazemos os cálculos usando$E(1, y) = -3y + 2$ e $E(2, y) = 4y - 2$.
- Obtemos a estratégia ótima $(4/7, 0, 3/7)$.

Estratégia para Carlos

- Estratégia ótima para Carlos terá a forma $(y, 0, 1-y)$
- Pois qualquer peso na coluna 2 ativa $E(x, 2)$ e aumenta o ganho de Luiza.
- Fazemos os cálculos usando $E(1, y) = -3y + 2$ e $E(2, y) = 4y - 2$.
- Obtemos a estratégia ótima $(4/7, 0, 3/7)$.

Estratégia para Carlos

- Estratégia ótima para Carlos terá a forma $(y, 0, 1-y)$
- Pois qualquer peso na coluna 2 ativa $E(x, 2)$ e aumenta o ganho de Luiza.
- Fazemos os cálculos usando$E(1, y) = -3y + 2$ e $E(2, y) = 4y - 2$.
- Obtemos a estratégia ótima $(4/7, 0, 3/7)$.

Estratégia para Carlos

- Estratégia ótima para Carlos terá a forma $(y, 0, 1-y)$
- Pois qualquer peso na coluna 2 ativa $E(x, 2)$ e aumenta o ganho de Luiza.
- Fazemos os cálculos usando$E(1, y) = -3y + 2$ e $E(2, y) = 4y - 2$.
- Obtemos a estratégia ótima $(4/7, 0, 3/7)$.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Jogos sem soma zero, e dois jogadores

- $\Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\Sigma_2 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ estratégias puras.
- $\Pi(e_i, f_j) = (\Pi_1(e_i, f_j), \Pi_2(e_i, f_j)) = (a_{ij}, b_{ij})$
- $A = (a_{ij})$ matriz de Luiza e $B = (b_{ij})$ matriz de Carlos.
- Se Luiza escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e Carlos escolhe $\mathbf{q}$ então o pagamento de Luiza será:
- $E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t A \mathbf{q}$
- E de Carlos:
- $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i,j} b_{ij} p_i q_j = \mathbf{p}^t B \mathbf{q}$
- Note que agora não há o interesse racional de Carlos minimizar o pagamento de Luiza uma vez que isto não significa mais que ele estará aumentando seu pagamento.

Equilíbrios de Nash

- Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter
- $a_{kl} \geq a_{il} \forall i$ e $b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$
- Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Equilíbrios de Nash

- Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter
- $a_{kl} \geq a_{il} \forall i$ e $b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$
- Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Equilíbrios de Nash

- Para que um par de estratégias puras (e_k, f_l) seja um perfil de equilíbrio de Nash devemos ter
- $a_{kl} \geq a_{il} \forall i$ e $b_{kl} \geq b_{kj} \forall j$
- Então para descobrirmos se existe equíbrios de estratégias puras, marcamos os maiores elementos em cada coluna de A e os maiores elementos em cada linha de B, se existir uma posição kl em que a_{kl} e b_{kl} estiverem marcados então (e_k, f_l) será um equilíbrio. Claro que pode não existir.

Um Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Um Exemplo

$(5,2)$	$(3,0)$	$(8,1)$	$(2,3)$
$(6,3)$	$(5,4)$	$(7,4)$	$(1,1)$
$(7,5)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(0,2)$

(17)

Um Exemplo

$(5,2)$	$(3,0)$	$(8,1)$	$(2,3)$
$(6,3)$	$(5,4)$	$(7,4)$	$(1,1)$
$(7,5)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(0,2)$

(18)

Um Exemplo

$(5,2)$	$(3,0)$	$(8,1)$	$(2,3)$
$(6,3)$	$(5,4)$	$(7,4)$	$(1,1)$
$(7,5)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(0,2)$

(19)

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Equilíbrios na extensão mista

- $M_1 = \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ e
  $M_2 = \{(y, 1-y) : y \in [0,1]\}$: Estratégias mistas.
- $E(x,y) =$
  $(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$
- é o pagamento de Luiza. O pagamento de Carlos é:
- $F(x,y) =$
  $(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}$

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Conjuntos dos Perfís racionais

- Para achar os equilíbrios de Nash achamos os perfís racionais.
- Para Luiza:
- $R_1 = \{(x, y) : E(x, y) = \sup_{\bar{x} \in [0,1]} E(\bar{x}, y)\}$
- E para Carlos:
- $R_2 = \{(x, y) : F(x, y) = \sup_{\bar{y} \in [0,1]} F(x, \bar{y})\}$
- Encontramos $R_1 \cap R_2$.

Um exemplo da estratégia descrita acima

O jogo é descrito pela seguinte bimatrix de pagamento

$(3, 2)$	$(2, 4)$
$(2, 3)$	$(4, -3)$

Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

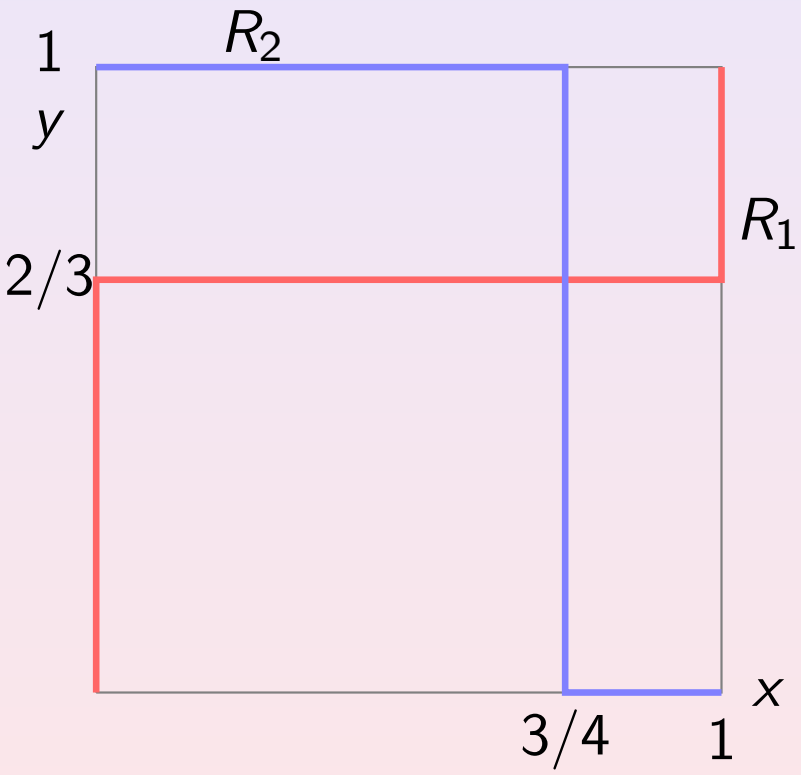
Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

Pagamento de Luiza e Carlos

- O pagamento de Luiza será
- $E(x, y) = (3y - 2)x - 2y + 4$
- Pagamento de Carlos:
- $F(x, y) = (-8x + 6)y + 7x - 3$

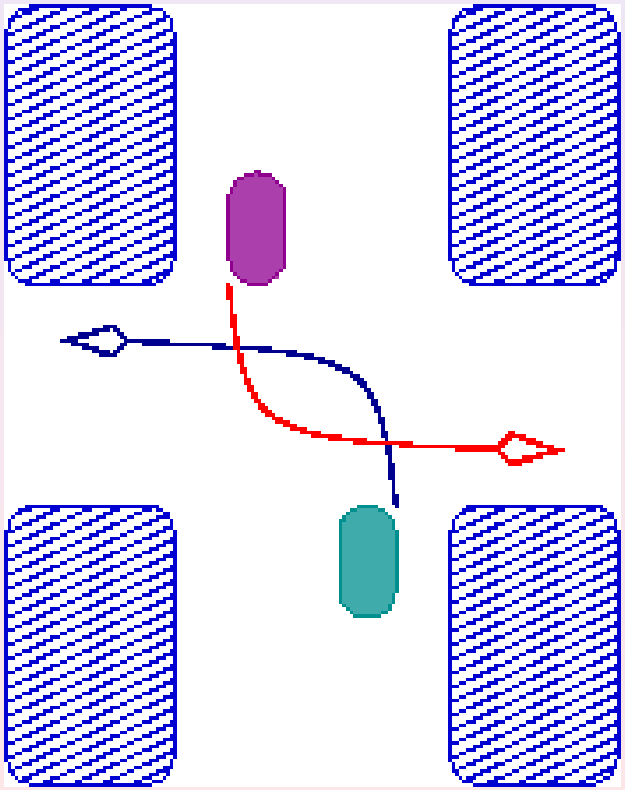
Conjuntos R_1 e R_2



$(3/4, 1/4)$ e $(2/3, 1/3)$ é equilíbrios de Nash.

Jogo do Cruzamento

Neste Jogo Carlos e Luiza encontram-se num cruzamento.



As Matrizes de Pagamentos

$$A = \begin{pmatrix} -t_2/2 - \epsilon & -t_2 \\ 0 & -t_2/2 - \delta \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -t_1/2 - \epsilon & 0 \\ -t_1 & -t_1/2 - \delta \end{pmatrix}$$

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

As Estratégias

- Cada um pode esperar (E) e prosseguir (P).
- t_1 é o tempo para Luiza completar a conversão.
- t_2 é o tempo pa Carlos completar a conversão.
- ϵ atraso devido a mútua espera.
- δ atraso devido ao mútuo avanço.

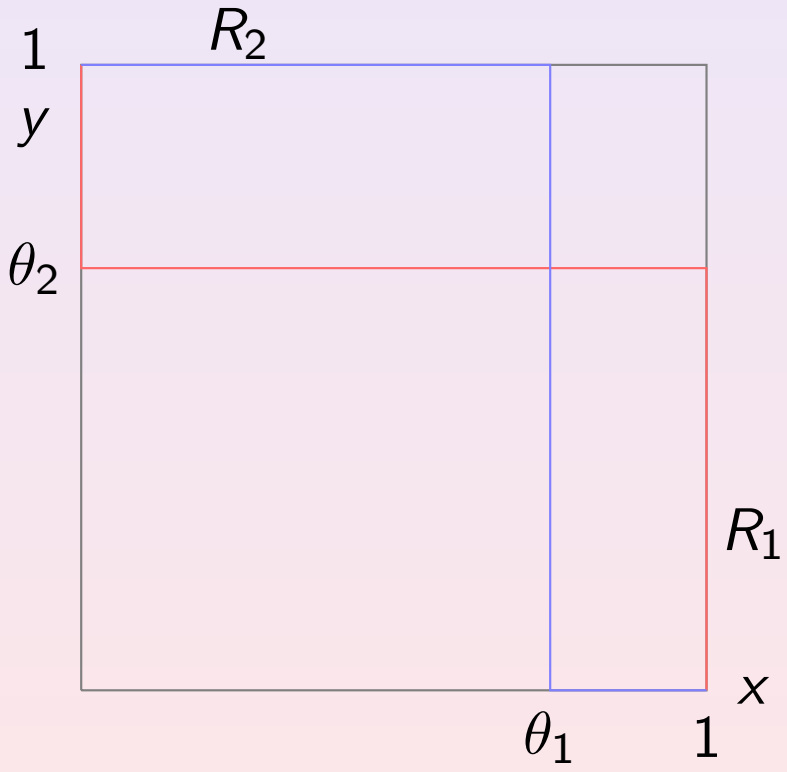
Fórmula dos pagamentos dos jogadores

- $E(x, y) = (-(\epsilon + \delta)y + (\delta - t_2/2))x + (t_2/2 + \delta)y - t_2/2 - \delta$
- $F(x, y) = (-(\epsilon + \delta)x + (\delta - t_1/2))y + (t_1/2 + \delta)x - t_1/2 - \delta$

Fórmula dos pagamentos dos jogadores

- $E(x, y) = (-(\epsilon + \delta)y + (\delta - t_2/2))x + (t_2/2 + \delta)y - t_2/2 - \delta$
- $F(x, y) = (-(\epsilon + \delta)x + (\delta - t_1/2))y + (t_1/2 + \delta)x - t_1/2 - \delta$

Representação Gráfica de R_1 e R_2



O Jogo Hawk-Dove

Dois leões competem pela posse de território. Se dois leões se encontram numa disputa cada um deles pode agir de duas maneiras: comportamento agressivo (Hawk), ou ele apenas ruge ameaçadoramente mas foge se vier um ataque (Dove). Digamos que o leão Jubinha encontra-se com o Sansão e iniciam a competição. Se Jubinha agir como Hawk e Sansão como Dove, Jubinha ficará com o território e ganhará ρ pontos. Se Sansão reagir, ou seja, agir com Hawk também, aí haverá luta com chances iguais de ganho para cada um dos lados. O lado ganhador receberá ρ e o perdedor perderá C. O valor esperado de ganho de Jubinha é $\rho/2 - C/2$. Quando Jubinha agir como dove, não ganha nada se Sansão for Hawk (ele foge) e ganhará metade das disputas por rugidos se Sansão for Dove.

As matrizes deste Jogo

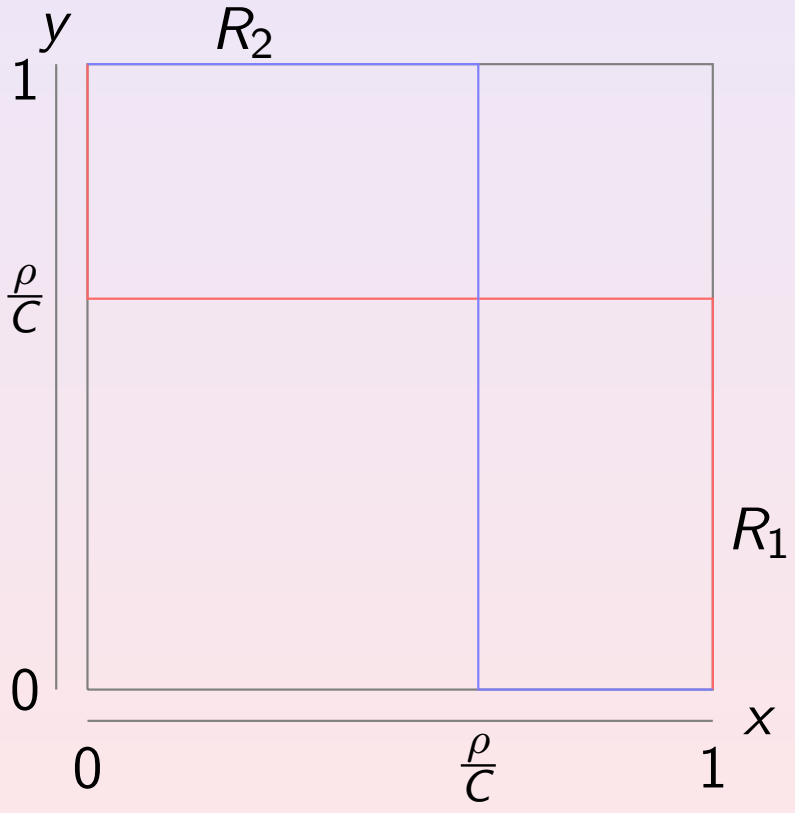
$$A = \begin{pmatrix} 1/2(\rho - C) & \rho \\ 0 & 1/2\rho \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1/2(\rho - C) & 0 \\ \rho & 1/2\rho \end{pmatrix} \quad (20)$$

Funções de pagamentos

$$E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2} \tag{21}$$

$$F(x,y) = (-\frac{C}{2}x + \frac{\rho}{2})y - \frac{\rho}{2}x + \frac{\rho}{2} \tag{22}$$

Identificação dos pontos de equilíbrio



Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Jogo Populacional

- Um jogo em que $A = B^t$ como o jogo Hawk-Dove é chamado de Jogo Populacional.
- Neste caso, o jogo é simétrico e não é importante quem tem as linhas ou colunas.
- A idéia é que este jogo ocorra entre os elementos de uma população, constantemente e de forma aleatória.
- A idéia do jogo populacional foi introduzida por Maynard-Smith.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Escolha dos equilíbrios de Nash

- Em alguns jogos podem ter muitos equilíbrios de Nash.
- Se estes equilibrios dão o mesmo pagamento para os jogadores e podem ser alternados, são soluções de Nash do Jogo.
- Se isto não acontecer são necessários outros critérios para escolha de um equilíbrio.
- No caso de jogos populacionais, são os equilibrios evolucionáriamente estáveis.

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Estratégias não invadíveis

- Por causa da simetria de um jogo populacional só consideramos uma função de pagamento.
- No caso H-D: $E(x,y) = (-\frac{C}{2}y + \frac{\rho}{2})x - \frac{\rho}{2}y + \frac{\rho}{2}$.
- Uma estratégia x^* é não invadível se:
- $E(x^*,x^*) \geq E(y,x^*)$ para todo $y \in [0,1]$
- $E(x^*,x^*) = E(y,x^*)$ então $E(x^*,y) > E(y,y)$

Interpretação da estratégia não invadível

Se a maioria da população usa a estratégia x^* e um invasor da espécie usa a estratégia y então o ganho do invasor contra um elemento que usa a estratégia da maioria x^* não será maior que o ganho de alguém com a estratégia comum x^*. Ainda que o invasor logre igualar o ganho contra x^*, contra outro invasor ele sairia perdendo.

Equilíbrio evolucionariamente estável no Hawk-Dove

- (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis.
- No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.
- Este equilíbrio tem uma caracterização dinâmica.

Equilíbrio evolucionariamente estável no Hawk-Dove

- (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis.
- No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.
- Este equilíbrio tem uma caracterização dinâmica.

Equilíbrio evolucionariamente estável no Hawk-Dove

- (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash. Chamaremos este equilíbrio de evolucionariamente estáveis.
- No jogo Hawk-Dove o par $(\rho/C, \rho/C)$ é um equilíbrio evolucionariamente estável.
- Este equilíbrio tem uma caracterização dinâmica.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Equação do replicador

- Equação geral do replicador para jogo populacional $n \times n$.
- $\dot{x}_i(t) = x_i(t)(E(i, \mathbf{x}) - E(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$
- $\dot{x}_i(t) = e_i A\mathbf{x} - \mathbf{x}A\mathbf{x}$
- Equilíbrios assintóticamente estáveis dão equilíbrios evolucionariamente estáveis.

Exemplo do Hawk-Dove

- Neste caso só temos duas estratégias e a equação do Replicador se reduz a
- $\dot{x} = x(E(1,x) - E(x,x))$ ou
- $\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x)$

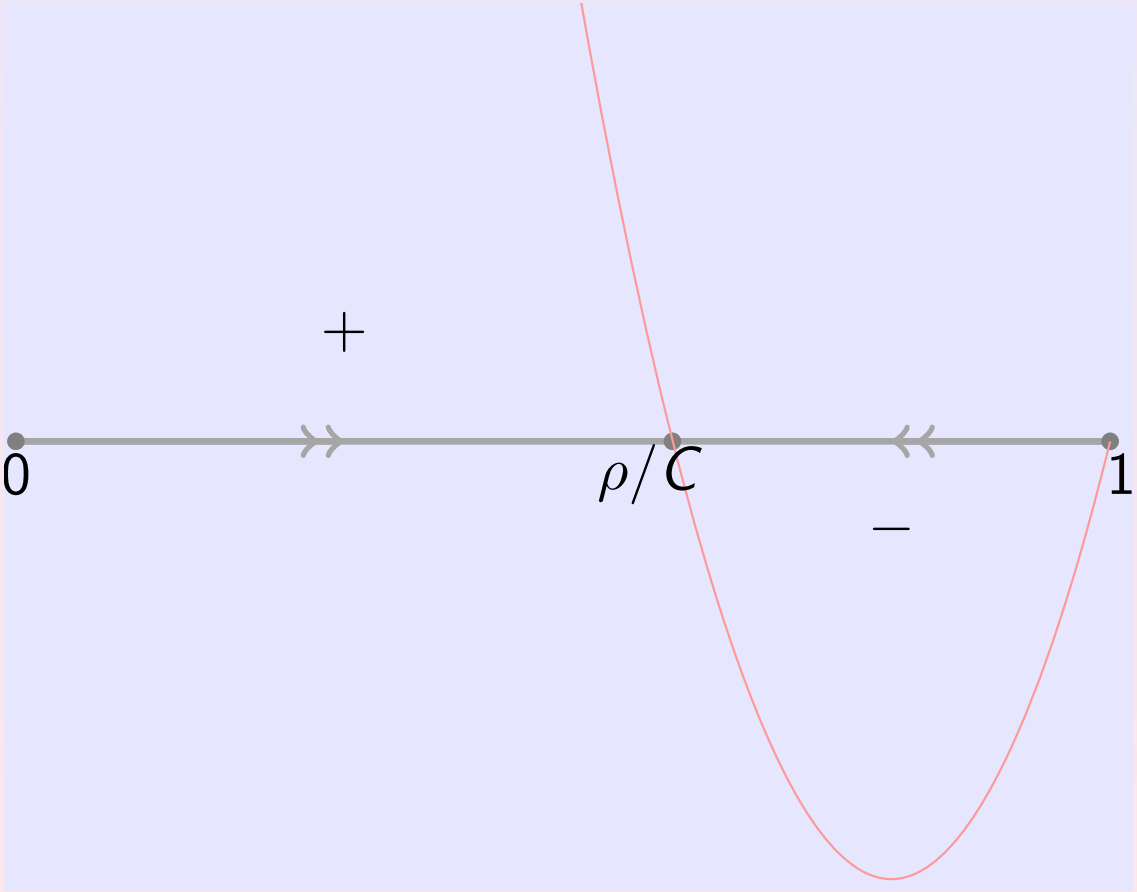
Exemplo do Hawk-Dove

- Neste caso só temos duas estratégias e a equação do Replicador se reduz a
- $\dot{x} = x(E(1,x) - E(x,x))$ ou
- $\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x)$

Exemplo do Hawk-Dove

- Neste caso só temos duas estratégias e a equação do Replicador se reduz a
- $\dot{x} = x(E(1,x) - E(x,x))$ ou
- $\dot{x} = \frac{x}{2}(Cx^2 - (\rho + C)x + \rho) = F(x)$

Determinando os pontos de equilíbrios estáveis



Bibliografia

- Peter Morris **Introduction to Game Theory** - Springer Verlag, 1994.
- Martin J. Osborne e Ariel Rubinstein **A Course in Game Theory** - MIT Press, 1994.
- Michael Mesterton-Gibbons **An Introduction to Game-Theoretic Modelling** second ed. AMS, 2001.
- Saul Stahl **A Gentle Introduction to Game Theory** AMS, 1999.

Mais referências

- J Maynard Smith **Evolution and the Theory of Games** CUP, 1974.
- J.von Neumann e O. Morgenstern **Theory of Games and Economic Behavior** J. Willey Sons, 1944.
- J. Harsanyi e R. Selten **A General Theory of Equilibrium Selection in Games** MIT Press, 1988.